接続問題 (複素領域における微分方程式)

河野, 實彦

数理解析研究所講究録
351巻 1979年 69-84

接続問題

広島大 理学部 河野實彦

1. 第1種 Airy 関数の拡張

$t=0$ に確定特異点，$t=\infty$ には rank q の不確定特異点と2つの特異点をもつ線型微分方程式系

$$(1.1) \qquad t\frac{dX}{dt} = (A_0 + A_1 t + \cdots + A_q t^q) X$$

の解の大域的性質を規定する Stokes 係数を求める理論は，簡単に次のように述べることができる；$t=0$ における解の巾級数表現の係数 $G_j(m)$ は q 階線型差分方程式系の特殊解であり，それをある適当に選んだ基本解 $F_{jl}^k(m)$ $(k=1,2,\dots n;\ l=1,2,\dots,q)$ によって

$$(1.2) \qquad G_j(m) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{q} \Gamma_{jl}^k F_{jl}^k(m)$$

と表わしたときの定数係数 Γ_{jl}^k が求める Stokes 係数となる．

このことは，線型差分方程式の解の接続問題とも言えるが m は整数値をとるので，係数 Γ_{jl}^k は定数として求まるのである． 線型差分方程式論では，解は右または左半平面におけ

る $m\to\infty$ のときの漸近挙動によって定められるのが一般的である。この事実を考慮すれば，定数 Γ^{k}_{jl} の explicit な値を求める方法として，(1.2) を連立方程式として解いて，右半平面上で $m\to\infty$ とすれば良い。しかし，このためには $G_j(m)$ の漸近挙動がわかっていなければならない。この終末条件による方法を用いて，Extended Airy equation

(1.3) $$z^n y^{(n)} - z^q y = 0 \qquad (q:\text{整数},\ q\geq n)$$

の解の大域的性質を解明してみよう。

先ず，(1.3) に変数変換 $z = t^n$ を施し，

$$y_1 = y, \qquad y_p = \{\mathcal{D} - n(n-p+1)\}\{\mathcal{D} - n(n-p+2)\}\cdots\{\mathcal{D} - n(n-1)\}\, y,$$

$$\mathcal{D} = t\frac{d}{dt}, \qquad (p = 2, 3, \ldots, n)$$

とおき，列ベクトル $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)_*$ （$*$ は転置を表わす）に関する微分方程式系に書き直し，さらに，それに shearing transformation $X = S(t)Y$，$S(t) = \mathrm{diag}\,(t^{-q(n-1)}, t^{-q(n-2)}, \ldots, t^{-q}, 1)$ を適用すると，次の微分方程式系が得られる。

(1.4) $$t\frac{dX}{dt} = (A_0 + A_q t^q)\, X$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{pmatrix} \qquad p_j = (n-j)(n+q) \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$A_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ n^n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

この形にしてみると，(1.4) は確定特異点 $t=0$ において

$$X_j(t) = t^{\rho_j} \sum_{m=0}^{\infty} G_j(m)\, t^m \qquad (j=1,2,\ldots,n) \tag{1.5}$$

なる収束巾級数表現の基本解をもち，不確定特異点 $t=\infty$ においては

$$\begin{cases} X^k(t) = \exp\left(\dfrac{\lambda_k}{q} t^q\right) t^{\mu_k} \displaystyle\sum_{s=0}^{\infty} H^k(s)\, t^{-s} \\ \lambda_k = n\, \omega_n^{k-1} \quad (\omega_n = \exp(2\pi i/n)) \\ \mu_k = (n+q)(n-1)/2, \quad H^k(0) = (1, \lambda_k, \ldots, \lambda_k^{n-1})_* \end{cases}$$

$$(k=1,2,\ldots,n)$$

なる形式解をもつことは容易に判る。

(1.5) の係数 $G_j(m)$ は線型差分方程式系

$$\begin{cases} (m+\rho_j - A_0)\, G_j(m) = A_q\, G_j(m-q), \\ G_j(0) \neq 0, \quad G_j(r) = 0 \quad (r<0) \qquad (j=1,2,\ldots,n) \end{cases} \tag{1.6}$$

をみたす特殊解であり，一方，各 j に対して

$$\begin{cases} F_{jl}^k(m) = \displaystyle\sum_{s=0}^{\infty} H^k(s)\, g_{jl}^k(m+s), \\ g_{jl}^k(m) = \dfrac{1}{q} \dfrac{\left\{\left(\frac{\lambda_k}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \omega_q^{-(l-1)}\right\}^{m+\rho_j-\mu_k}}{\Gamma\left(\frac{m+\rho_j-\mu_k}{q}+1\right)} \end{cases}$$

$$(\omega_q = \exp(2\pi i/q)\ ;\ k=1,2,\ldots,n\ ;\ l=1,2,\ldots,q)$$

は (1.6) の基本解をなすことが示される。その結果 (1.2) を得，次の展開定理を証明することができる。

$$\begin{aligned} X_j(t) &= t^{\rho_j} \sum_{m=0}^{\infty} G_j(m)\, t^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{q} P_{jl}^k\, F_{jl}^k(m) \right) t^{m+\rho_j} \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{q} \mathrm{P}_{jl}^{k} \sum_{s=0}^{\infty} H^{k}(s)\, g_{jl}^{k}(m+s) \Big) t^{m+\rho_j}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{q} \mathrm{P}_{jl}^{k} \sum_{s=0}^{\infty} H^{k}(s)\, x_{jl}^{k}(t,s),$$

$$x_{jl}^{k}(t,s) = t^{\rho_j} \sum_{m=0}^{\infty} g_{jl}^{k}(m+s)\, t^{m}.$$

上で定義された関数 $x_{jl}^{k}(t,s)$ は1階の非斉次線型微分方程式の特殊解で，その大域的性質を通して $X_j(t)$ の大域的性質が解明されるというのが我々の理論の骨子である．$X_j(t)$ の大域的挙動は

$$\begin{cases} X_j(t) \sim \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}_{jl_k}^{k} X^{k}(t) \quad \text{as } t \to \infty \text{ in } S(l_1, l_2, \ldots, l_n) = S_{l_1}(\lambda_1) \\ \qquad \cap S_{l_2}(\lambda_2) \cap \cdots \cap S_{l_n}(\lambda_n), \\ S_l(\lambda_k) : \ -\frac{3\pi}{q} + \frac{2\pi}{q} l \leq \arg \lambda_k^{\frac{1}{q}} t < -\frac{\pi}{q} + \frac{2\pi}{q} l \end{cases}$$

である。

さて，Stokes P_{jl}^{k} を求めてみよう．(1.6) から $G_j(m)$ の値は

$$\begin{cases} G_j((mn+j-1)q) = (g^{(j,1)}(mn+j-1), 0, \ldots, 0)^{*}, \\ \qquad g^{(j,1)}(mn+j-1) = q^{-mn} \Big[\prod_{i=1}^{n} \Gamma(m+1+\frac{i-j}{q}) \Big]^{-1}, \\ G_j((mn+j-1)q+r) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, q-1) \\ \qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

であることがわかり，連立方程式

$$G_j((mn+j-1)q+r) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{q} \mathrm{P}_{jl}^{k} F_{jl}^{k}((mn+j-1)q+r)$$

$$(r = 0, 1, \ldots, q-1)$$

を $\Pi_{j\ell}^{k}$ について解き，右半平面上で $m\to\infty$ のとき

$$F_{j\ell}^{k}(m) \sim H^{k}(0)\, g_{j\ell}^{k}(m)\left\{1+O(m^{-1})\right\},$$

$$\frac{g_{j\ell}^{k}(m+r)}{g_{j\ell}^{k}(m)} \sim \left\{\left(\frac{\lambda_k}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \omega_q^{-(\ell-1)}\right\}^{r} m^{-\frac{r}{q}}\left\{1+O(m^{-\frac{1}{q}})\right\},$$

$$\frac{g^{(j,1)}(mn+j-1)}{g_{j\ell}^{k}((mn+j-1)q)} \sim \left\{\frac{n}{(2\pi)^{n-1}}\right\}^{\frac{1}{2}} q^{j+\frac{\rho_j-\mu_k}{q}}\, \omega_q^{(\ell-1)(\rho_j-\mu_k)}\, \omega_n^{-(k-1)\left\{(j-1)+\frac{\rho_j-\mu_k}{q}\right\}}$$

$$\times\left\{1+O(m^{-1})\right\}$$

となることを考慮すれば，

$$(1.7)\qquad \Pi_{j\ell}^{k} = \frac{q^{\frac{(n+q)(n-1)}{2q}}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2}}}\, q^{-\frac{n}{q}(j-1)}\, \omega_q^{\{(k-1)-n(\ell-1)\}\left\{(j-1)+\frac{(n+q)(1-n)}{2n}\right\}}$$

$$(j,k=1,2,\dots,n\ ;\ \ell=1,2,\dots,q)$$

が得られる。

以上の結果を Extended Airy equation (1.3) に戻って，定理の形に書いておく。

<u>定理 1.</u> Extended Airy equation (1.3) の基本解

$$(1.8)\qquad y_j(z) = z^{n-j}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(m+1+\frac{i-j}{q}\right)\right)^{-1}\left(z^{q}q^{-n}\right)^{m}$$

$$(j=1,2,\dots,n)$$

の大域的挙動は

$$(1.9)\qquad y_j(z) \sim \sum_{k=1}^{n}\Pi_{j\ell_k}^{k}\, y^{k}(z) \quad \text{as } z\to\infty \text{ in } S'(\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_n)$$

$$= S_{l_1}^{1} \cap S_{l_2}^{2} \cap \cdots \cap S_{l_n}^{n}$$

$$S_l^k : (2l-3)\pi - \frac{2\pi}{n}(k-1) \leq \arg z^{\frac{q}{n}} < (2l-1)\pi - \frac{2\pi}{n}(k-1)$$

である。ここで，$y^k(z)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ は

$$y^k(z) = \exp\left(\frac{n}{q}\omega_n^{k-1} z^{\frac{q}{n}}\right) z^{\frac{(n-q)(n-1)}{2n}} \sum_{s=0}^{\infty} h^k(s) z^{-\frac{q}{n}s}$$

$$(h^k(0) = 1 ;\ k=1, 2, \ldots, n)$$

と表わされる (1.3) の形式解であり，Stokes 係数 Π_{jl}^k は (1.7) で与えられたものである．但し，l はすべての整数値をとって良いことを注意しておく。

この結果は H.L. Turrittin (1950), J. Heading (1957–1960), B.L.J. Braakoma (1971) 等の結果よりは明解であると思うが...

(1.3) において $n=2$, $q=3$ のときは，古典的な Airy equation である．基本解として，第1種，第2種の Airy 関数と呼ばれる $Ai(z)$, $Bi(z)$ なるものがとれ，その性質は良く知られるところである． $n=2$, $^\forall q \geq 2$ のとき，C. A. Swanson & V. B. Headley : An extension of Airy's equation, SIAM J. Appl. Math., 15 (1967) 1400–1412 は modified Bessel function を用いて，$Ai(z)$ $Bi(z)$ に対応する関数を定義し，その大域的性質，零点分布等を調べた．この線に沿って，我々は Extended Airy function of the first kind $Ai(z)$ を定義し（勿論，$n=2$ のときは，古典的 $Ai(z)$ であり，Swanson & Headley による定義のものである），

その諸々の性質を調べることにしよう。

$Ai(z)$ は (1.3) をみたす整関数解であり，$\arg z=0$ 上で principally recessive な解として定義する。一意的にきまるためには $n=2N$ （N: 整数, $N\geqq 1$） でなければならない。

定理1の結果より

$$(1.10)\qquad Ai(z)=\sum_{j=1}^{n} c_j\, y_j(z) \sim \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j\, T_{j l_k}^{k}\Big)\, y^k(z)$$

$$\text{as } z\to\infty \text{ in } S'(l_1, l_2, \ldots, l_n)$$

を得るが，$\arg z=0$ は $l_k=1$ $(k=1,2,\ldots,N)$ $l_k=2$ $(k=N+1, N+2,\ldots,n)$ に対応する sector $S(1,\ldots,1,2,\ldots,2)$: $0\leqq \arg z^{\frac{2}{n}}<\frac{\pi}{N}$ に含まれ，形式解 $y^k(z)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ の中で，$y^{N+1}(z)$ が $\arg z=0$ 上で最も弱い growth order をもつものであるから，c_j としては，連立方程式

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j\, T_{j l_k}^{k} = \delta_{k\, N+1} \quad (k=1,2,\ldots,n), \\ \delta_{ij} \quad \text{Kronecker のデルタ}, \\ l_k=\begin{cases} 1 & k=1,2,\ldots,N \\ 2 & k=N+1, N+2,\ldots,n \end{cases} \end{cases}$$

を解くことによって求められる。このことから，Extended Airy function of the first kind $Ai(z)$ は次のように定義される

$$(1.11)\qquad Ai(z)= D\sum_{j=1}^{n} (-1)^j q^{\frac{n}{q}(j-1)}\, P_{n-j}(\omega_q^{-N+1},\ldots,1,\ldots,\omega_q^{N-1})\, y_j(z),$$

$$D=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n^{\frac{1}{2}}\,q^{\frac{(n+q)(1-n)}{2q}}}{\prod_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{q}i\right)}$$

ここで，$P_{n-j}(\omega_q^{-N+1},\ldots,1,\ldots,\omega_q^{N-1})$ は $\omega_q^{-N+1},\omega_q^{-N+2},\ldots,1,\ldots,\omega_q^{N-1}$ の $(n-j)$ 次の基本対称関数で，実数値であり，また

$$(1.12)\quad P_{n-j}(\omega_q^{-N+1},\ldots,1,\ldots,\omega_q^{N-1})=P_{j-1}(\omega_q^{-N+1},\ldots,1,\ldots,\omega_q^{N-1})$$
$$(j=1,2,\ldots,N)$$

なる対称関係をみたしている．

注意 $n=2$ のときの定義に従えば，(1.11) において定数 D は除き，それは $Ai(z)$ の Stokes 係数に組み込むべきであろうが，後の計算の都合上このままにしておく．

次に，$Ai(z)$ の性質を調べよう．

線形従属関係式

$k_j\ (j=1,2,\ldots,n)$ を modulo q で互いに相異なる整数とするとき，$Ai(\omega_q^{k_j}z)\ (j=1,2,\ldots,n)$ の Wronskian は

$$W\left[Ai(\omega_q^{k_1}z),\ Ai(\omega_q^{k_2}z),\ \ldots,\ Ai(\omega_q^{k_n}z)\ ;\ z\right]$$
$$=c_1c_2\cdots c_n\prod_{1\leq i<j\leq n}\sin\left(\frac{k_j-k_i}{q}\pi\right)\exp\left\{\left(\frac{k_j+k_i}{q}+\frac{1}{2}\right)\pi i\right\}$$

$c_1,c_2,\ldots,c_n$ は (1.10) の係数，

となる．即ち，$Ai(\omega_q^{k_j}z)\ (j=1,2,\ldots,n)$ は (1.3) の基本解をな

す。例えば，$k_j = 0 \pmod q$ ならば

$$Ai(z) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, Ai(\omega_q^{k_j} z)$$

$$\alpha_j = \frac{\prod_{i=1}^{n}{}'(\omega_q^{k_i}-1)}{\prod_{i=1}^{n}{}'(\omega_q^{k_i}-\omega_q^{k_j})}$$ （$\prod'$ は j に対応する項を除いたものの積）

$(j=1,2,\ldots,n)$

なる関係式が成り立つ。　古典的 $Ai(z)$ の

$$Ai(z) + \omega\, Ai(\omega z) + \omega^2 Ai(\omega^2 z) = 0 \;, \quad \omega = \exp(2\pi i/3)$$

に対応するものである。

<u>$Ai(z)$ の大域的挙動</u>

大域的挙動を知るためには，関係式 (1.10) の右辺の係数を計算すれば良い。

<u>定理 2.</u>　$q = \mu n + \nu \geqq n \quad (\mu \geqq 1,\ 0 \leqq \nu < n)$ とし，

$$d_k = \exp\left[\frac{(n-1)k}{n}\pi i\right] \frac{\prod_{j=1}^{2N-1} \sin\left(\frac{j+k}{q}\pi\right)}{\prod_{j=1}^{2N-1} \sin\left(\frac{j}{q}\pi\right)} \qquad (k=0,1,\ldots)$$

とおく。　そのとき，複素平面　$0 \leqq \arg z < 2\pi$ において，

$$Ai(z) \sim d_{pn}\, y^{N+1}(z) + d_{pn+1}\, y^{N}(z) + \cdots + d_{pn+r}\, y^{N+1-r}(z)$$
$$+ d_{(p+1)n+r+1}\, y^{N-r}(z) + d_{(p+1)n+r+2}\, y^{N-r-1} + \cdots + d_{(p+1)n+n-1}\, y^{N+2}(z)$$

$$\text{as } z \to \infty \quad \text{in}$$

$$S_{pn+r} : \left(2p+\frac{r}{N}\right)\pi \leqq \arg z^{\frac{q}{n}} < \left(2p+\frac{r+1}{N}\right)\pi$$

$$(p=0,1,\ldots,\mu;\ r=0,1,\ldots,2N-1;\ pn+r<q)$$

が成り立つ。　上式右辺の形式解の添字 $N-r$ は，$\hat{r} = N-r$

(mod $2N$) ($1 \leqq \hat{r} \leqq 2N$) なる整数とみなす。Stokes 係数 d_k は $d_{-k} = 0$ ($k>0$) であり，$d_{(\mu-1)n+\nu+1} = d_{(\mu-1)n+\nu+2} = \cdots = d_{\mu n+\nu-1} = 0$ である。また，$-2\pi \leqq \arg z < 0$ においては，

$$A_i(z) \sim \bar{d}_{pn}\, y^{N+1}(z) + \bar{d}_{pn+1}\, y^{N+2}(z) + \cdots + \bar{d}_{pn+r}\, y^{N+1+r}(z)$$
$$+ \bar{d}_{(p-1)n+r+1}\, y^{N+r+2}(z) + \bar{d}_{(p-1)n+r+2}\, y^{N+r+3}(z) + \cdots + \bar{d}_{(p-1)n+n-1}\, y^{N}(z)$$
$$\text{as } z \to \infty \text{ in}$$
$$S_{-(pn+r)} : \ -\left(2p+\frac{r+1}{N}\right)\pi \leqq \arg z^{\frac{q}{n}} < -\left(2p+\frac{r}{N}\right)\pi$$
$$(p = 0, 1, \ldots, \mu\ ;\ r = 0, 1, \ldots, 2N-1\ ;\ pn+r < q)$$

が成り立つ。さらに，Riemann 面上での挙動は，上の関係式において，p に任意の正の整数値，r に 0 から $2N-1$ の値をとらせれば良い。

この定理により，$A_i(z)$ の Stokes 現象は直ちに解明される。複素平面上 $0 \leqq \arg z < 2\pi$ では，$\arg z^{\frac{q}{n}} = \theta$ とおき，

$$\theta_k = \frac{\pi}{2N} + \frac{\pi}{N}k \qquad (k = 0, 1, \ldots, q-1)$$

とすると，

$$\begin{cases} A_i(z) \sim y^{N+1}(z) & (0 \leqq \theta < \theta_N) \\ A_i(z) \sim d_{k+1-N}\, y^{n-k}(z) & (\theta_k \leqq \theta < \theta_{k+1}) \\ & (k = N, N+1, \ldots, q-N-2) \\ A_i(z) \sim d_{q-N}\, y^{N-\nu+1}(z) & (\theta_{q-N-1} \leqq \theta < \frac{q}{N}\pi) \end{cases}$$

となる。$\arg z = \frac{n}{q}\theta_k = \frac{\pi}{q}(2k+1)$ ($k = N, N+1, \ldots, q-N-1$) が $A_i(z)$ の真の Stokes line である。

$Ai(z)$ の零点分布

古典的 $Ai(z)$ がそうであるように，Stokes 現象の起きるところに零点は分布する．

定理3. m_0 を十分大きい正の整数とする．m_0 より大きい任意の整数 m に対して，

$$\rho = \left\{ \frac{m + \left(\frac{n-1}{2n}\right)\pi}{\frac{n}{q} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right\}^{\frac{n}{q}}$$

とすれば，各 Stokes line $\arg z = \frac{\pi}{q}(2k+1)$ $(k = N, N+1, \ldots, q-N-1)$ 上の $|z| < \rho$ なる部分に丁度 m コの $Ai(z)$ の零点が分布する．

Sommel の方法

複素振動論において，いわゆる Green の公式を用いる Sommel の方法は，2階線型微分方程式をみたす解の振動を調べる際には非常に有効である．しかし，2N階線型微分方程式に対しては，その方法は N－零点分布を調べることになる．

$a = re^{i\theta}$ $(\theta \neq p\pi,\ p \in \mathbb{Z})$ を $Ai(z)$ の N－零点とする．即ち，$Ai(a) = Ai'(a) = \cdots = Ai^{(N-1)}(a) = 0$ とする．

$Ai(z)$ の定義式 (1.11) の係数はすべて実数であるから，$\overline{Ai(z)} = Ai(\bar{z})$ が成り立ち，$\bar{a}$ もまた $Ai(z)$ の N-零点であることがわかる．この事実と Green の公式とから，

$$(1.13)\qquad \sin q\theta \int_0^1 x^{q-n} |Ai(ax)|^2\, dx$$
$$= (-1) \sin (n-1)\theta \cdot r^{n-1-q}\, Ai^{(n-1)}(0)\, Ai(0)$$
$$+ (-1)^2 \sin (n-3)\theta \cdot r^{n-1-q}\, Ai^{(n-2)}(0)\, Ai'(0)$$
$$+ \\ \vdots$$
$$+ (-1)^N \sin\theta \cdot r^{n-1-q}\, Ai^{(N)}(0)\, Ai^{(N-1)}(0),$$

$$(1.14)\qquad \sin q\theta \int_0^1 |Ai^{(N)}(ax)|^2\, dx$$
$$= (-1) \sin (q-1)\theta \cdot r^{-1}\, Ai^{(N)}(0)\, Ai^{(N-1)}(0)$$
$$+ (-1)^2 \sin (q-3)\theta \cdot r^{-1}\, Ai^{(N+1)}(0)\, Ai^{(N-2)}(0)$$
$$+ \\ \vdots$$
$$+ (-1)^N \sin (q-n+1)\theta \cdot r^{-1}\, Ai^{(n-1)}(0)\, Ai(0)$$

を得る．これらの等式のどちらか一方でも成り立たなければ，そこには $Ai(z)$ の N-零点は分布しない（N-零点の分布しないところを N-zero-free domain という）．ところで，N-零点が存在すれば，当然 Stokes line 上に分布しているはずである．その上では，(1.13−14) の左辺は 0 となり，また，先に注意した係数の対称関係式 (1.12) を考慮すれば，

$$Ai^{(j-1)}(0)\, Ai^{(n-j)}(0) < 0 \qquad (j=1,2,\ldots,N)$$

であることを知るので，

$$\{ (-1) \sin(n-1)\theta,\ (-1)^2 \sin(n-3)\theta,\ \ldots,\ (-1)^N \sin\theta \}$$

か

$$\left\{ (-1)\sin(q-1)\theta,\ (-1)^2\sin(q-3)\theta,\ \ldots,\ (-1)^N\sin(q-n+1)\theta \right\}$$

が同符号 $(\gtrless 0)$ となる Stokes line 上には N-零点は分布していないことになる。例えば，$n=4$, $q=8$ の場合，Stokes line は $\arg z=(5/8)\pi, (7/8)\pi, (9/8)\pi, (11/8)\pi$ であるが，$\arg z=(5/8)\pi$, $(11/8)\pi$ 上には $A_i(z)$ の 2-零点は分布していないと結論される．

2。多点接続問題

線型微分方程式系

$$\text{(2.1)} \qquad \frac{dX}{dt}=\left(\frac{A_0}{t}+\frac{A_1}{t-1}+A_2\right)X$$

の接続問題を考察しよう。 $t=0, 1$ は確定特異点で，そこでの特性定数を α_j, β_j $(j=1,2,\ldots,n)$ とする．α_j, β_j はそれぞれ A_0, A_1 の固有値である． $t=\infty$ は rank 1 の不確定特異点で，そこでの特性定数を λ_k, μ_k $(k=1,2,\ldots,n)$ とする。$\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i\neq j)$ と仮定すれば，(2.1) で最初から，$A_2=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ であるとしても良い． 特性定数の間に常に一つ存在する不変式，いわゆる Fuchs の関係式は

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j+\sum_{j=1}^{n}\beta_j = 2\sum_{k=1}^{n}\mu_k+n$$

である．

さて，(2.1) の接続問題を解くには，次のような reduction を行うのが良い。 $\varphi = t(t-1)$ とおくと，(2.1) は

$$\varphi X' = \left\{ A_2\varphi + \left(\frac{A_1+A_0}{2}\right)\varphi' + \left(\frac{A_1-A_0}{2}\right)\right\} X \qquad \left({}' = \frac{d}{dt}\right)$$

$$= \left\{ A\varphi + B\varphi' + C \right\} X$$

と書き直すことができる。 そこで，$t = 0, 1$ の近傍では

$$(2.2) \quad \begin{cases} X(t) = X_1(\varphi) + \varphi' X_2(\varphi) \\ X_i(\varphi) = \varphi^{\rho} \sum_{m=0}^{\infty} G_i(m)\varphi^m \quad (i=1,2\,;\ \rho = \alpha_j \text{ or } \beta_j) \end{cases}$$

なる収束巾級数で表現される解をとり，$t = \infty$ の近傍にあっては，形式解を

$$(2.3) \quad \begin{cases} Y^k(t) = e^{\lambda_k t}\left\{ Y_1^k(\varphi) + \varphi' Y_2^k(\varphi) \right\} \\ Y_i^k(\varphi) = \sum_{s=0}^{\infty} H_i^k(s)\, \varphi^{-s+\mu_k} \quad (i=1,2) \\ \qquad (k = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

と表現することにする。

$X_i(\varphi)$ $(i=1,2)$ は微分方程式系

$$(2.4) \quad \begin{cases} \varphi \dfrac{d}{d\varphi} X_1 = BX_1 + (A\varphi + C)X_2 \\ (1+4\varphi)\varphi \dfrac{d}{d\varphi} X_2 = (A\varphi + C)X_1 + (B(1+4\varphi) - 2\varphi)X_2 \end{cases}$$

をみたす。 $\varphi = -1/4$ は見掛けの特異点である。

(2.2) を (2.4) に代入してみるとわかるが，係数 $G_i(m)$ は，差分方程式系

$$(2.5)\quad \left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} m+\rho-B & -C \\ -C & m+\rho-B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_1(m) \\ G_2(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 4(B-(m-1+\rho))-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_1(m-1) \\ G_2(m-1) \end{pmatrix} \\ (G_1(0), G_2(0))_* \neq 0 \;,\; (G_1(r), G_2(r))_* = 0 \quad (r<0) \end{array}\right.$$

の特殊解である．同様にして，形式解 (2.3) の係数 $H_i^k(s)$ は差分方程式系

$$(2.6)\quad \left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_k-A \\ \lambda_k-A & 4(\mu_k-s-1-B)+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_1^k(s+1) \\ H_2^k(s+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B-\mu_k+s & C \\ C & B-\mu_k+s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_1^k(s) \\ H_2^k(s) \end{pmatrix} \\ (H_1^k(0), H_2^k(0))_* \neq 0 \;,\; (H_1^k(r), H_2^k(r))_* \neq 0 \quad (r<0) \end{array}\right.$$

をみたす特殊解であることも知る．

§1 で述べたと同様の，$X(t)$ の展開式を得るために

$$\varphi\, x'(t,s) = (\lambda_k \varphi + (\mu_k - s)\varphi')\, x(t,s)$$
$$+ \left\{ (s+\rho-\mu_k)\, g_2^{kl}(s) + \lambda_k\, g_2^{kl}(s-1)\,\varphi' \right\} \varphi^\rho$$

の解として定義される基本関数を導入する．その関数は

$$\left\{\begin{array}{ll} x^{kl}(t,s) = x_1^{kl}(\varphi,s) + \varphi'\, x_2^{kl}(\varphi,s) & (l=1,2) \\ x_i^{kl}(\varphi,s) = \sum_{m=0}^{\infty} g_i^{kl}(m+s)\,\varphi^{m+\rho} & (i=1,2) \end{array}\right.$$

と表わされるもので，その巾級数表現の係数 $g_i^{kl}(m)$ $(i,l=1,2)$ は超幾何差分方程式

$$(2.7)\quad \left\{\begin{array}{l} (m+\rho-\mu_k)\; g_1^{kl}(m) = \lambda_k\, g_2^{kl}(m-1) \\ (m+\rho-\mu_k)\; g_2^{kl}(m) = \lambda_k\, g_1^{kl}(m-1) + \{4(\mu_k-\rho-m)+2\}\, g_2^{k}(m-1) \end{array}\right.$$

をみたす基本解である．しかし，ここでは紙数の都合で詳し

く述べられないが，$g_i^{kl}(m)$ は基本関数の大域的性質との関連から適当に選ばれてきまった関数である（l は vector への依存を示す添字）．そこで，

$$F_{ij}^{kl}(m) = \sum_{s=0}^{\infty} H_i^k(s)\, g_j^{kl}(m+s) \qquad (i,j=1,2)$$

が well-defined であることを証明すれば，(2.6)(2.7) とから

$$\begin{cases} \hat{F}_1^{kl}(m) = F_{11}^{kl}(m) + F_{22}^{kl}(m) + 4F_{22}^{kl}(m-1) \\ \hat{F}_2^{kl}(m) = F_{12}^{kl}(m) + F_{21}^{kl}(m) \end{cases}$$

は (2.5) の基本解をなすことが容易に示される．このことから

$$\begin{cases} G_1(m) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{2} P^{kl}\, \hat{F}_1^{kl}(m) \\ G_2(m) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{2} P^{kl}\, \hat{F}_2^{kl}(m) \end{cases}$$

によって，Stokes 係数 P^{kl} $(k=1,2,\dots,n;\ l=1,2)$ を決定し，$X(t)$ を基本関数列 $\{x^{kl}(t,s)\}$ によって次のように展開することができる．

$$\begin{aligned} X(t) &= X_1(\varphi) + \varphi' X_2(\varphi) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{2} P^{kl}\left(\sum_{s=0}^{\infty} H_1^k(s)\, x^{kl}(t,s) + \varphi' \sum_{s=0}^{\infty} H_2^k(s)\, x^{kl}(t,s)\right) \end{aligned}$$

として，$x^{kl}(t,s)$ の大域的性質より $X(t)$ のそれが解明される訳である．上の方法は，確定特異点の数，不確定特異点の rank が増しても良いと思う．